

Буль функциясы. (Логика алгебрасы).

Булевы функциясы дегеніміз - екі мәнді қабылдайды (ақиқат, жалған, ия, жоқ және т.б.) және екі мәнді қабылдайтын аргумент.

Буль функциясына тәуелді аргументтер саны арность немесе местность деп аталады.

0- местные, бұлар екеу ғана болады.

$$f_0=0; \quad f_1=1.$$

1- местные немесе бірорынды (унарные), бұлар екеу ғана болады.

$$f(x)=x; \quad \overline{x} = \neg x = \text{~~}\sim x\text{}~~$$

x	\overline{x}
0	1
1	0

Терістеу ол да инверсия болып табылады.

2-местные(бинарлық).

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$	$x \oplus y$	$x y$	$x \uparrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

$x \wedge y = x \& y = x \cdot y = x y$ – конъюнкция, ол да логикалық көбейтінді болып табылады. “и”, минимум.

$$x \vee y = \text{~~}\tilde{x} + y\text{}~~$$

-дизъюнкция, максимум.

Ескірген қолайсыз логикалық қосу.

$$x \rightarrow y = \text{~~}\tilde{x} + y\text{}~~$$

-импликация.

$x \equiv y = x \sim y$ – эквиваленция болып келеді.

$x \oplus y = x + y = x \oplus y$ екінші модульмен қосынды, альтернация.

$x | y$ -штрих Шифферы.

$x \uparrow y = x \downarrow y$ – Пирс.

} **Вебб функциясы.**

Буль функциясының негізгі қасиеттері.

Сөйлем:

1) Ассоциативтік (терімділік) \wedge, \vee, \oplus

$$\Delta \in \{ \wedge, \vee, \oplus \} \Delta z$$

2) Коммутативтік $\wedge, \vee, \oplus, \equiv, |, \uparrow$

$$\square \in \{ \wedge, \vee, \oplus, \equiv, |, \uparrow \}$$

$$x \square y = y \square x$$

3) Дистрибутивтік

a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$(x \vee (y \wedge z)) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

б) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

в) $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$

$$[x \vee (y \oplus z)] = (x \vee y) \oplus (x \vee z)$$

4) Де Морган заңы. $\text{---} \text{---}$

a) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y = \overline{x \vee y}$

б) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$

5) Бейтараптық.

a) $x \vee 0 = x$

б) $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$

в) $x \oplus 0 = x$

6) a) $x \wedge 0 = 0$

б) $x \vee 1 = 1$

в) $x \oplus 1 = \neg x = \overline{x}$

7) a) $x \wedge x = x$

б) $x \vee x = x$

в) $x \oplus x = 0$

8) a) $x \vee \overline{x} = 1$

б) $x \wedge \overline{x} = 0$

9) a) $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$

б) $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$

в) $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$

$$[x \vee (y \oplus z)] = (x \vee y) \oplus (x \vee z)$$

Жеке орындау жаттығулары

1. Келесі формулалар үшін ақиқаттық кестесін құрыңыз.

1. $x \vee \overline{y}$

2. $x \wedge \overline{y}$

3. $x \rightarrow (y \vee x)$

4. $x \rightarrow (x \wedge y)$
5. $(x \vee y) \rightarrow (\bar{y} \vee \bar{x})$
6. $x \rightarrow ((y \vee x) \vee z)$
7. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$
8. $(x \rightarrow y) \rightarrow z$
9. $x \sim (y \sim z)$
10. $(x \sim y) \sim z$
11. $(x \vee (y \vee z)) \rightarrow (\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}))$
12. $(x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (x \rightarrow (y \wedge z))$
13. $(x \sim \overline{(y \vee z)}) \sim (x \sim (y \vee z))$
14. $(x \vee \bar{y}) \rightarrow ((y \wedge \bar{z}) \rightarrow (x \vee (y \sim z)))$
15. $((x \sim y) \sim ((z \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})) \rightarrow \bar{z})) \sim (x \vee y)$
16. $(x \sim y) \rightarrow (((y \sim z) \rightarrow (z \sim x)) \rightarrow (x \sim z))$

Элементар бульдік функциялар үшін теңбе – тең түрлендірулер арқылы формулаларды оңайлатуға болады. Келесі теңдіктер жиі қолданылады:

1. $a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b$
2. $a \sim b \equiv (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) \equiv ab \vee \bar{a}\bar{b} \equiv (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b})$
3. $a \vee \bar{a}b \equiv a \vee b$
4. $\bar{a} \vee ab \equiv \bar{a} \vee b$
5. $a(\bar{a} \vee b) \equiv ab$
6. $\bar{a}(a \vee b) \equiv \bar{a}b$

1. Берілген формулаларды дизъюнктивті қалыпты формаға (ДҚФ) келтіріңіз.

- 1.1. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$
- . $\bar{x}y \vee (x \rightarrow y)$
- . $(x \vee y \vee z)(x \rightarrow y)$
- . $(x \vee y)(y \vee z) \rightarrow (x \vee z)$
- 1.5. $x \sim y$
- 1.6. $x \vee \vee y$
- 1.7. $x \sim y \sim z$
- 1.8. $(x \rightarrow y) \sim x \rightarrow (y \rightarrow z)$
- 1.9. $(x \sim y)(y \sim z) \rightarrow (x \sim z)$
- 1.10. $(x \sim y)(y \sim z)(z \sim x)$

2. Берілген формулаларды конъюнктивті қалыпты формаға (КҚФ) келтіріңіз.

- 2.1. $x \vee yz$
- 2.2. $xy \vee yz \vee \bar{z}$
- 2.3. $x \vee yz \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$
- 2.4. $x \rightarrow yz$
- 2.5. $x \rightarrow yzv$
- 2.6. $x \sim yz$
- 2.7. $xy \sim \bar{x} \bar{y}$
- 2.8. $x \sim y \sim z$
- 2.9. $x \vee y \sim x \sim z$
- 2.10. $\vee \vee (y \vee \vee z)$

3. Төмендегі формулаларды қалыпты формаға келтіріп, теңбе– тең ақиқат немесе теңбе- тең жалған екенін анықтаңыз.

$$3.1. \quad xy \rightarrow x \vee y$$

$$3.2. \quad x \vee y \rightarrow xy$$

$$3.3. \quad \bar{x}y \rightarrow x\bar{y}$$

$$3.4. \quad (x \rightarrow y)x \rightarrow x \vee y \vee z$$

$$3.5. \quad x \vee y \rightarrow x \vee z$$

$$3.6. \quad (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$$

$$3.7. \quad (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z))$$

$$3.8. \quad \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$$

$$3.9. \quad xy \vee \bar{x}\bar{y} \sim (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$$

$$3.10. \quad z \vee x \rightarrow z \vee y$$

4. Төмендегі формулаларды кемелденген дизъюнктивті қалыпты формаға (КДҚФ) келтіріңіз.

$$4.1. \quad \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$4.2. \quad (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow x$$

$$4.3. \quad x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$4.4. \quad x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$4.5. \quad (x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$4.6. \quad (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)(z \rightarrow x)$$

$$4.7. \quad (x \vee y)(y \vee z)(z \sim x)$$

$$4.8. \quad (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)(z \rightarrow v)$$

$$4.9. \quad (z \rightarrow x)(x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$$

$$4.10. \quad (z \vee y)(y \vee x)(x \sim z)$$

5. Төмендегі формулаларды кемелденген конъюнктивті қалыпты формаға (ККҚФ) келтіріңіз.

$$5.1. \quad (x \rightarrow y) \rightarrow x \vee \bar{y}$$

$$5.2. \quad x\bar{y} (x \rightarrow y)$$

$$5.3. \quad x\bar{x}\bar{y}$$

$$5.4. \quad x \rightarrow yz$$

$$5.5. \quad xyz$$

$$5.6. \quad (x \vee y)(y \rightarrow z)(z \sim x)$$

$$5.7. \quad x \vee y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$5.8. \quad ((x \rightarrow y) \sim (y \rightarrow \bar{x}))z$$

$$5.9. \quad x \vee y \vee z \rightarrow (x \vee y)z$$

$$5.10. \quad xy \rightarrow zv$$

Жаттығулар

Элементар бульдік функциялар үшін теңбе – тең түрлендірулер арқылы формулаларды оңайлатуға болады. Тәжірибеде келесі теңдіктер жиі қолданылады:

$$1. \quad a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b$$

$$2. \quad a \sim b \equiv (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) \equiv ab \vee \bar{a}\bar{b} \equiv (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b})$$

$$3. \quad a \vee \bar{a}b \equiv a \vee b$$

$$4. \bar{a} \vee ab \equiv \bar{a} \vee b$$

$$5. a(\bar{a} \vee b) \equiv ab$$

$$6. \bar{a}(a \vee b) \equiv \bar{a}b$$

1. Берілген формулаларды дизъюнктивті қалыпты формаға (ДҚФ) келтіріңіз.

$$1.1. x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$\cdot \overline{xy} \vee (\overline{x \rightarrow y})$$

$$\cdot (x \vee y \vee z)(\overline{x \rightarrow y})$$

$$\cdot (x \vee y)(y \vee z) \rightarrow (x \vee z)$$

$$1.11. x \sim y$$

$$1.12. x \vee \vee y$$

$$1.13. x \sim y \sim z$$

$$1.14. (x \rightarrow y) \sim \overline{x \rightarrow (y \rightarrow z)}$$

$$1.15. (x \sim y)(y \sim z) \rightarrow (x \sim z)$$

$$1.16. (x \sim y)(y \sim z)(z \sim x)$$

2. Берілген формулаларды конъюнктивті қалыпты формаға (КҚФ) келтіріңіз.

$$2.11. x \vee yz$$

$$2.12. xy \vee yz \vee \bar{z}$$

$$2.13. x \vee yz \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$$

$$2.14. x \rightarrow yz$$

$$2.15. x \rightarrow yzv$$

$$2.16. x \sim yz$$

$$2.17. xy \sim \bar{x} \bar{y}$$

$$2.18. x \sim y \sim z$$

$$2.19. x \vee y \sim x \sim z$$

$$2.20. \vee \vee (y \vee \vee z)$$

3. Төмендегі формулаларды қалыпты формаға келтіріп, теңбе– тең ақиқат немесе теңбе- тең жалған екенін анықтаңыз.

$$3.11. xy \rightarrow x \vee y$$

$$3.12. x \vee y \rightarrow xy$$

$$3.13. \bar{x} y \rightarrow x \bar{y}$$

$$3.14. (x \rightarrow y)x \rightarrow x \vee y \vee z$$

$$3.15. x \vee y \rightarrow x \vee z$$

$$3.16. (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$$

$$3.17. (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z))$$

$$3.18. \bar{x} yz \vee x \bar{y} z \vee xy \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z}$$

$$3.19. xy \vee \bar{x} \bar{y} \sim (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$$

$$3.20. z \vee x \rightarrow z \vee y$$

4. Төмендегі формулаларды кемелденген дизъюнктивті қалыпты формаға (КДҚФ) келтіріңіз.

$$4.1. \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$4.2. (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow x$$

$$4.3. x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$4.4. x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$4.5. (x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$4.6. (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)(z \rightarrow x)$$

$$4.7. (x \vee y)(y \vee z)(z \sim x)$$

$$4.8. (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)(z \rightarrow v)$$

$$4.9. (z \rightarrow x)(x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$$

$$4.10. (z \vee y)(y \vee x)(x \sim z)$$

5. Төмендегі формулаларды кемелденген конъюнктивті қалыпты формаға (ККҚФ) келтіріңіз.

$$5.11. (x \rightarrow y) \rightarrow x \vee \bar{y}$$

$$5.12. x \bar{y} (x \rightarrow y)$$

$$5.13. x \bar{x} \bar{y}$$

$$5.14. x \rightarrow yz$$

$$5.15. xyz$$

$$5.16. (x \vee y)(y \rightarrow z)(z \sim x)$$

$$5.17. x \vee y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$5.18. ((x \rightarrow y) \sim (y \rightarrow \bar{x}))z$$

$$5.19. x \vee y \vee z \rightarrow (x \vee y)z$$

$$5.20. xy \rightarrow zv$$

6. Берілген функциялар үшін:

а) қай айнымалылар ақиқат екенін анықтап, жалғанды жою керек;

б) f функциясы үшін кемелденген ДҚФ және КНФ – ны табыңыз;

в) екі жақты функцияны табыңыз;

г) Жегалкин көпмүшелігін құрыңыз;

д) бірқалыптылыққа зерттеңіз.

$$6.1. f = (((x \oplus y) \rightarrow \bar{y}) \wedge (\bar{y} \rightarrow (x|z))) \wedge (x \oplus y)) \rightarrow (x|z) \wedge (x \vee z);$$

$$6.2. f = (((x \oplus y) \wedge \neg(y \equiv z)) \vee ((y \oplus z) \rightarrow (x \equiv y))) \wedge ((x|x) \vee y);$$

$$6.3. f = ((\bar{x} \vee z) \rightarrow (((y \oplus x) \wedge \bar{z}) \vee ((x \vee (x \oplus y)) \rightarrow z))) \wedge (\bar{x} \uparrow y);$$

$$6.4. f = ((x \oplus y \oplus 1) \rightarrow ((x|(\bar{y} \wedge z)) \vee (x \equiv y))) \wedge (\bar{x} \equiv z);$$

$$6.5. f = ((x \wedge \bar{y}) \rightarrow (\neg(\bar{x} \vee y) \vee ((y \equiv z) \uparrow (x \oplus \bar{z})))) \wedge (\bar{z} \oplus x);$$

$$6.6. f = ((\bar{x} \vee (y \equiv \bar{z})) \rightarrow (\neg(x \rightarrow z) \vee (\bar{x} \vee ((\bar{y} \equiv z) \wedge z)))) \wedge (y \oplus z);$$

$$6.7. f = (((x \oplus \bar{y} \oplus z) \wedge (y \vee (z|x))) \rightarrow (y \vee (z|x))) \wedge (z \uparrow z \rightarrow x);$$

$$6.8. f = ((\neg(x \vee y) \wedge ((y \oplus z) \rightarrow (\bar{x} \equiv (y|z)))) \rightarrow (x \uparrow y)) \wedge (\bar{x} \vee y);$$

$$6.9. f = ((\bar{x} \vee y) \rightarrow ((x|x \vee \neg(y \wedge \bar{z})) \rightarrow (x \rightarrow z))) \wedge (z \oplus y);$$

$$6.10. f = ((x|x) \uparrow \bar{y}) \rightarrow (((\bar{x} \oplus z) \equiv y) \rightarrow (x \wedge y)) \wedge (x|z)$$

7. Берілген функция үшін ҚДҚФ –ны табыңыз:

а) Квайн әдісімен

б) Карно картасы бойынша

$$7.1. g = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1); \quad h = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4;$$

$$7.2. g = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1); \quad h = x_1x_4 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3;$$

$$7.3. g = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0); \quad h = x_2\bar{x}_1 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4;$$

$$7.4. g = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1); \quad h = \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4;$$

$$7.5. g = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,0); \quad h = x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4;$$

$$7.6. g = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0); \quad h = \bar{x}_2x_4 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4;$$

- 7.7. $\mathbf{g} = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1); \quad \mathbf{h} = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3x_4;$
- 7.8. $\mathbf{g} = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0); \quad \mathbf{h} = x_1x_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4;$
- 7.9. $\mathbf{g} = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0); \quad \mathbf{h} = x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4;$
- 7.10. $\mathbf{g} = (1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0); \quad \mathbf{h} = x_1 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4;$